Step1. $\Sigma - p_n \log p_n \le \Sigma - p_n \log q_n$

$f(q_1, q_2 \cdots, q_n) = \Sigma - p_n \log q_n$

임의의 q_i, q_j $(1 \le i < j \le n)$ 제외 $n-2$개의 변수를 고정하자.

$f_{i,j}(q_i, q_j) = \Sigma - p_n \log q_n$ ($q_i + q_j = $ Constant), $q_i > 0$, $q_j > 0$)

$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial q_i} = -\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_j}{q_j}\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = -\frac{p_i}{q_i} + \frac{p_j}{q_j} = 0$, $\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial q_i^2} = -\frac{p_i}{q_i^2} - \frac{p_j}{q_j^2} < 0$

$\frac{p_i}{q_i} = \frac{p_j}{q_j}$ 인 q_i, q_j 값에서 $f_{i,j}(q_i, q_j)$의 minimum이 생긴다.

$\therefore$ 모든 i, j에 대해서 $\frac{p_i}{q_i} = \frac{p_j}{q_j}$ 이 되어야 minimum이 되므로 minimum 일때

$\frac{p_1}{q_1} = \cdots\cdots = \frac{p_n}{q_n}$, $p_i = q_i$

$f(q_1 \cdots q_n) \ge f(p_1 \cdots p_n)$ ∎

Step2. statement : $e^{h(p)} \le C\, m(p)$, C는 임의의 상수

각각의 M에 대해 $q_n = \frac{1}{2M} a^n$ $(1 \le n \le M)$을 정의하자. $(a<1)$

$(a + \cdots + a^M = M)$

$e^{h(p)} = e^{\Sigma - p_n \log p_n} \le e^{\Sigma - p_n \log q_n} = e^{-\log(a) \cdot \Sigma n p_n + \log 2M \Sigma p_n} = M e^{-\log(a) \cdot m(p)}$

W.T.S $2M e^{-\log(a) \cdot m(p)} \le C \cdot m(p)$ for $C \in \mathbb{R}^+$, $\forall M \in \mathbb{Z}^+$

$h(M,p) = 2M \cdot \frac{e^{-\log(a) \cdot m(p)}}{m(p)}$ $(1 \le m(p) \le M)$

각각의 M에 대해 $h(M,p)$의 maximum을 구하자.

$m(p)$를 y라 하면 $M \frac{e^{-\log(a) \cdot y}}{y} = g(y)$의 maximum을 계산하면 $h(M,p)$의 maximum (M: fixed)가 나온다.

$g'(y) = 2M \frac{(1-\log(a)) e^{-\log(a) \cdot y}}{y^2} > 0$ $(a<1 \Rightarrow 1-\log(a) > 0)$

~~따라서~~ ; $g(y)$의 maximum은 $g(M) = 2M \cdot \frac{e^{-\log(a) \cdot M}}{M}$ 이다.

$h_1(M) = 2e^{-\log(a) \cdot M}$ $(a + \cdots + a^M = 2M)$ 이라 하자.

$\lim_{M \to \infty} h_1(M)$에 대해 계산하자. 만약 converge 하면, $\forall M, p$에 대해 $h(M,p)$는 bounded 된다.

$$\lim_{M\to\infty} 2e^{-\log(a)\cdot M} = \lim_{M\to\infty} \frac{2}{a^M} \ (-$$

W.T.S $\lim_{M\to\infty} a^M$ exists and is not zero

$$a + \cdots + a^M = \frac{a(a^M - 1)}{a-1} = 2M$$

$a^M - 1 = 2M(1 - \frac{1}{a})$ Let $x = a^M$, then $a = x^{\frac{1}{M}}$

$$x - 1 = 2M(1 - x^{-\frac{1}{M}})$$

$$\lim_{M\to\infty} x - 1 = \lim_{M\to\infty} 2M(1 - x^{-\frac{1}{M}}) = \lim_{t\to 0} 2\frac{1 - x^{-t}}{t} \quad (t = \tfrac{1}{M})$$

$$= -2(-\ln x) = 2\ln x$$

$\therefore x - 2\ln x - 1 = 0.$

$x - 2\ln x - 1$ 의 근이 $\lim_{M\to\infty} a^M$ 의 값이다.

$f(x) = x - 2\ln x - 1$. $f''(x) = \frac{2}{x^2} > 0$ 이므로 $f(x)$ 의 근은 2개 이하이다.

실제로 그래프를 그리면 $x = 1, 3.5128\ldots$ 이다.

만약 $\lim_{M\to\infty} a^M = 1$ 이면, $\lim_{M\to\infty} \frac{a(a^M - 1)}{a - 1} = \frac{a}{a-1}\cdot 0 = 0 = \lim_{M\to\infty} 2M$ (X)

따라서 $\lim_{M\to\infty} a^M = 3.512\ldots\ldots$ ■

$\lim_{M\to\infty} h_1(M)$ 은 converge 한다. 그러므로 $\{h_1(M) : M \in \mathbb{N}\}$ 은 bounded

그리고 $\{h(M, p) : M \in \mathbb{N}, p$: 변수 M개의 확률 분포$\}$ 도 bounded.

$$\frac{2M \cdot e^{-\log(a)\cdot m(p)}}{m(p)} \le C \quad \text{for } \forall M, p$$

$$e^{h(p)} \le (2Me^{-\log(a)\cdot m(p)} \le C \cdot m(p) \ ■$$