<2번 풀이>

Lemma1) 확률분포 p, q에 대해 다음이 성립한다 : $-\sum_{n=1}^{M} p_n \ln p_n \le -\sum_{n=1}^{M} p_n \ln q_n$

proof)
음이 아닌 실수 p, q에 대해 다음이 성립함을 기억하자 : $p - p\ln p \le q - p\ln q$.
위 식을 정리하면 $\ln(q/p) \le q/p - 1$이고, $q/p \ge 0$이므로 성립함을 쉽게 알 수 있다. 이제 $p_n - p_n \ln p_n \le q_n - p_n \ln q_n$의 양변을 $n=1$부터 M까지 더하면 주어진 부등식을 얻는다.

Lemma2) $0 < c < 1$, $M \in N$이라면 $\log_a\left(\frac{c}{c+1-a^c}\right) - cM = 0$인 a가 유일하게 존재한다.

proof)
$f(a) = \log_a\left(\frac{c}{c+1-a^c}\right) - cM$ 라고 정의하자. 약간의 계산을 통해 $f(a)$의 정의역은 $(0, \sqrt[c]{c+1})$임을 얻는다. 그런데 $\lim_{a \to 0+} f(a) = -\infty$, $\lim_{a \to \sqrt[c]{c+1}-} f(a) = +\infty$이므로 중간값정리에 의해 $f(a) = 0$인 a가 존재한다. 또한 $f'(a) > 0$이므로 그러한 a는 유일하게 존재한다.

본 증명)
임의의 자연수 M, 수열 p에 대해 다음을 만족하도록 상수 a, c를 선택하자.

$$c = \frac{1}{m(p)} \cdots ① \qquad M = \frac{1}{c}\log_a\left(\frac{c}{c+1-a^c}\right) \cdots ②$$

$1 < m(p)$이므로 c는 위를 만족하도록 정의 가능하고, $0 < c < 1$이므로 Lemma 2에 의해 ②번 조건을 만족하는 상수 a 또한 유일하게 존재함을 알 수 있다.
이제 다음과 같은 수열 $q_n = ca^{-cn}$ $(1 \le n \le M)$에 대해 생각해보자. $q_n \ge 0$임은 자명하고, ②번 조건에 의해 $\sum_{n=1}^{M} q_n = 1$임을 알 수 있다. 따라서 수열 q는 확률분포이다.
$-\ln q_n = cn\ln a - \ln c$ 이므로
$h(p) = -\sum_{n=1}^{M} p_n \ln p_n \le -\sum_{n=1}^{M} p_n \ln q_n = \sum_{n=1}^{M} p_n (cn\ln a - \ln c) = cm(p)\ln a - \ln c = \ln a + \ln m(p)$.
(첫 번째 부등식에서 Lemma 1, 마지막 등식에서 ①이 사용되었다.) $\therefore e^{h(p)} \le am(p)$.
마지막으로 a의 범위에 대해 생각해보자. $f(a) = \log_a\left(\frac{c}{c+1-a^c}\right)$라고 하자.
먼저 M이 증가하면 a도 증가한다. 이는 $\frac{df(a)}{da} > 0$임에서 자명하다. 그러나 $a \ge e$가 되는 순간 $f(a)$의 치역은 양의 실수의 집합과 서로소가 되고, 이는 분명 불가능하다. 따라서 $a < e$이다.
정리해보면, 모든 M, 모든 p에 대하여 다음이 성립한다 : $e^{h(p)} < em(p)$.